Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Nach den Arbeiten von L. GÉRARD[1]), H. LIEBMANN[2]) und W. H. YOUNG[3]) hat neuerdings O. PERRON[4]) für die Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene einen wesentlich kürzeren Weg eröffnet.

In vorliegender Arbeit wird wieder eine andere Herleitung angegeben. Sie stützt sich auf die Untersuchungen von M. RÉTHY[5]) und CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN[6]). Bei dieser Beweisanordnung wird, wie bei W. H. YOUNG, aus der hyperbolischen Elementargeometrie nur der Satz als bekannt vorausgesetzt, nachdem die Winkelsumme im Dreieck kleiner als π ist. Mit Bogenlängen haben wir dagegen nichts zu tun.

§ 1. Einführung der Streckenfunktion $K(r)$.

Wir legen unserer Darstellung den folgenden Satz zugrunde, der vom Parallelenaxiom unabhängig ist.

Satz I. *Sind die Winkel $\sigma > \sigma'$ Zentriwinkel im Kreise mit den entsprechenden Sehnen s und s', so besteht die Ungleichung*

(1) $$\sigma' : \sigma < s' : s.$$

---

1) L. GÉRARD, *Sur la géométrie non-euclidienne*, Thèse (Paris, 1892).

2) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse*, **59** (1907), S. 187 210.

3) W. H. YOUNG, On the Analytical Basis of Non-Euclidian Geometry, *American Journal of Mathematics*, **33** (1911), S. 249–286.

4) O. PERRON, Neuer Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Trigonometrie, *Math. Annalen*, **119** (1944), S. 247–265.

5) M. RÉTHY, A három méretű homogén tér (u. n. nem euklidikus) síktani trigonometriája, *Értekezések a matematikai tudományok köréből*, **6** (1875), No. 7, S. 1–25; Die Fundamentalgleichungen der nichteuklidischen Geometrie auf elementarem Wege abgeleitet, *Archiv der Math. und Phys.*, **58** (1876), S. 416–423.

6) CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur la géométrie non euclidienne, *Mathesis*, (2) **5** (1895), Suppl. V, S. 6 15.

Zum Beweise dieses Satzes schicken wir einen Hilfssatz voran.

Hilfssatz 1. *Wird auf dem Kreisbogen* $\widehat{AP}$ *ein Punkt* Q *von* P *verschieden gewählt und der Bogen* $\widehat{PQ}$ *mit* H *halbiert, so ist*

(2) $$2AH > AP + AQ.$$

Das sieht man so ein: Sind P', Q', H' die Mitten der Bogen $\widehat{AP}$, $\widehat{AQ}$, $\widehat{AH}$ mit dem Mittelpunkt O und sind M, N, R die Schnittpunkte der Geraden $P'O, Q'O, H'O$ mit den Sehnen AP, AQ, AH, so sind augenscheinlich

(3) $$2AM = AP,\ 2AN = AQ,\ 2AR = AH$$

und

(4) $$\sphericalangle AMP' = \sphericalangle ANQ' = \sphericalangle ARH' = 90^0.$$

AH möge die Gerade $P'O$ bzw. $Q'O$ im Punkte S resp. T schneiden. Der Bogen $\widehat{P'Q'}$ wird von H' offenbar halbiert, infolgedessen ist $H'O$ die Mittelsenkrechte der Strecke $P'Q'$. Und da ferner $\sphericalangle P'Q'O = \sphericalangle Q'P'O$ ist und nach (4) die Gerade AH im Punkte R auf $H'O$ senkrecht steht, folgt aus Symmetriegründen die Streckengleichheit $RS = RT$. Daher ist $2AR = AS + AT$. Da aber auf Grund von (4) die Ungleichungen $AS > AM$, $AT > AN$ bestehen, folgt aus dieser Gleichung $2AR > AM + AN$. Damit ist mit Rücksicht auf (3) die Ungleichung (2) bewiesen. (Fällt Q mit A zusammen, also $AQ = 0$, so ist (2) unmittelbar klar.)

Auf Grund dieses Hilfssatzes läßt sich Satz I wie folgt beweisen. Wir betrachten auf einem Kreisbogen $\widehat{AB}$ einen Zwischenpunkt C. Es genügt offenbar, die Ungleichung

(1*) $$\widehat{AC} : \widehat{AB} < AC : AB$$

nachzuweisen. (Links steht das Verhältnis der Bogen $\widehat{AC}$ und $\widehat{AB}$, von Bogenlängen ist hierbei keine Rede.)

Sind die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ kommensurabel, so kann $\widehat{AB}$ in n gleiche Teile derart geteilt werden, daß einer der Teilungspunkte mit C zusammenfällt. Es sei diese Einteilung $\widehat{P_0P_1} = \widehat{P_1P_2} = \ldots = \widehat{P_{n-1}P_n}$ ($P_0 \equiv A$, $P_n \equiv B$) und P_ν möge mit C zusammenfallen. Nach Hilfssatz 1 gelten die Ungleichungen $2AP_i > AP_{i-1} + AP_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Daraus folgt, daß $AP_1 > \frac{1}{2}AP_2 > \frac{1}{3}AP_3 > \ldots > \frac{1}{n}AP_n$. Folglich ist $\frac{1}{\nu}AC = \frac{1}{\nu}AP_\nu > \frac{1}{n}AP_n = \frac{1}{n}AB$, d. h. $AC : AB > \nu/n$. Nach der Konstruktion ist aber $\widehat{AC} : \widehat{AB} = \nu/n$. Damit ist (1*) für diesen Fall bewiesen. Sind die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ inkommensurabel, so werde der Punkt D auf $\widehat{BC}$ derart gewählt daß $\widehat{AD}$ und $\widehat{AB}$ kommensurabel ausfallen. Wir teilen $\widehat{AD}$ durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ in n gleiche Teile; C möge auf dem Bogen $\widehat{P_{\nu_n-1}P_{\nu_n}}$ liegen.

$(P_0 \equiv A, P_n \equiv D)$. Nach den Vorangehenden gilt $\widehat{AP_{\nu_n}} : \widehat{AD} \leqq AP_{\nu_n} : AD$ (Gleichheit, wenn $\nu_n = n$ ist), also umsomehr $\widehat{AC} : \widehat{AD} < AP_{\nu_n} : AD$. Daraus folgt im Falle $n \to \infty$ $\widehat{AC} : \widehat{AD} \leqq AC : AD$. Da aber die Bogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{AB}$ kommensurabel sind, besteht noch $\widehat{AD} : \widehat{AB} < AD : AB$, und durch Multiplikation ergibt sich wieder (1*). Damit ist der Beweis des Satzes I fertig.

Wird ein gewisser Winkel als Einheit für die Winkelmessung angenommen und die Maßzahl eines jeden Winkels mit demselben Buchstaben bezeichnet wie der Winkel selbst, so hat die Ungleichung (1) auch die Form

$$s' : \sigma' > s : \sigma \tag{1**}$$

S a t z II. *Bezeichnet σ bzw. s die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise bzw. der entsprechenden Sehne, so strebt das Verhältnis $s : \sigma$ für $\sigma \to 0$ einem bestimmten positiven Grenzwert zu.* (Der natürlich von der Wahl der Einheiten abhängt.)

B e w e i s. Laut der Ungleichung (1**) wird das Verhältnis $s : \sigma$ bei Verkleinerung von σ vergrößert. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß $s : \sigma$ von oben beschränkt bleibt.

Es sei ein gewisser Zentriwinkel α, der einem Bogen $\widehat{AB}$ entspricht, festgehalten. Für jeden Zentriwinkel σ kann α in n Teile, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derart geteilt werden, daß jeder $\alpha_i < \sigma$ ausfällt. Bedeuten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die entsprechenden Sehnen, so gilt bekanntlich die Ungleichung

$$\min (s_i : \alpha_i) \leqq (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) : (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Da mit Rücksicht auf $\alpha_i < \sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ wegen (1**) auch noch $s : \sigma < \min (s_i : \alpha_i)$ besteht und $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$ ist, gilt umsomehr $s : \sigma < (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) : \alpha$. Die Summe $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ ist aber die Länge eines dem Kreisbogen $\widehat{AB}$ eingeschriebenen Linienzuges, also bekanntlich kleiner, als die Länge g eines festen, umgeschriebenen Linienzuges. Daher folgt die Abschätzung $s : \sigma < g : \alpha$ für jeden Zentriwinkel σ, w. z. b. w.

Dieser Grenzwert ist eine Funktion des Kreishalbmessers r. Wir bezeichnen diese Streckenfunktion mit $K(r)$, sie ist also durch die Formel

$$K(r) = \lim s : \sigma \qquad (\sigma \to 0) \tag{5}$$

erklärt, wobei σ die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise mit dem Radius r und s die entsprechende Sehne bedeutet. Undzwar soll aus Zweckmäßigkeitsgründen σ die *analytische Maßzahl* des Winkels bedeuten, d. h. *die Einheit für die Winkelmessung sei so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$ ergibt.*

§ 2. Die Winkelfunktionen $S(x)$ und $C(x)$.

Satz III. *Auf dem einen Schenkel des Spitzwinkels A seien die Strecken $AB' < AB$, und es seien die Lote $B'C'$ und BC auf den anderen Schenkel gefällt. Dann gelten die Ungleichungen*

$$AC' : AC > AB' : AB > B'C' : BC, \text{ d. h. } B'C' : AB' < BC : AB,$$
$$AC' : AB' > AC : AB.$$

Diese Ungleichungen lassen sich nämlich auf Grund der nachstehenden Hilfssätze analog beweisen, wie die Ungleichung (1*) im § 1. Die Beweise dieser Hilfssätze sind bei W. H. Young (a. a. O. §§. 3, 10) zu finden.

Hilfssatz 2. *Wird unter den obigen Voraussetzungen die Strecke BB' mit F halbiert und auf AC das Lot FG gefällt, so gilt die Ungleichung $2FG < BC + B'C'$. (Auch dann, wenn $B' \equiv A$, also $B'C' = 0$ ist.)*

Hilfssatz 3. *Wird unter den obigen Voraussetzungen CC' mit M halbiert und in M auf AC die Senkrechte errichtet, die AB in N schneiden möge, so ist die Ungleichung $2AN < AB + AB'$ gültig. (Auch dann, wenn $B' \equiv A$, also $AB' = 0$ ist.)*

Infolge des Satzes III streben die Verhältnisse $BC : AB$ und $AC : AB$ bei festgehaltenem $\sphericalangle A$ für $AB \to 0$ je einem bestimmten endlichen Grenzwert zu. Diese Grenzwerte sind daher Funktionen des Spitzwinkels $x = \sphericalangle A$. Hierbei soll x wieder die analytische Maßzahl bedeuten. Diese Winkelfunktionen sollen mit $S(x)$ bzw. $C(x)$ bezeichnet werden (wie bei O. Perron, a. a. O.), d. h. wir setzen für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$S(x) = \lim BC : AB \quad (AB \to 0), \quad C(x) = \lim AC : AB \quad (AB \to 0). \tag{6}$$

Im ganzen Intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist offenbar

$$S(x) < 1, \quad C(x) > 0. \tag{7}$$

§ 3. Der absolute Sinussatz von J. Bolyai in umgehüllter Form.

Der nachstehende Satz spielt in unseren weiteren Erörterungen eine entscheidende Rolle.

Satz IV. *Streben die Seiten des Dreiecks ABC gegen 0, so strebt seine Winkelsumme gegen π.*

Die Differenz $\pi - (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C)$ heißt *Defekt* des Dreiecks und möge mit Def ABC bezeichnet werden. Wird die Seite AB mit D in zwei Teile geteilt, so ist offensichtlich Def $ABC =$ Def $ADC +$ Def DBC, d. h. der Defekt ist eine additive Größe. Der Satz IV drückt die Tatsache aus, daß Def ABC *mit den Seiten des Dreiecks gegen* 0 *strebt.*

Beweis. Wir können uns auf rechtwinklige Dreiecke beschränken, denn ein jedes Dreieck kann in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt werden.

Ein rechter Winkel mit dem Scheitel C sei durch eine Halbgerade halbiert und auf dieser sei ein Punkt P von C verschieden gewählt. Es seien von P aus auf die Schenkeln die Lote PQ und PR gefällt. Wird auf die Halbgerade CQ eine Strecke $CA < CQ$ und auf CR eine Strecke $CB < CR$ abgetragen, so ist auf Grund der Additivität des Defektes augenscheinlich $\operatorname{Def} ABC < \operatorname{Def} PCQ + \operatorname{Def} PCR = 2 \operatorname{Def} PCQ$. Für den Beweis des Satzes IV genügt es offenbar zu zeigen, daß

(8) $$\operatorname{Def} PCQ \to 0 \text{ für } CP \to 0.$$

Ausgegangen von einem Punkte P_0 mit dem Lot P_0Q_0, sei CQ_0 mit Q_1 halbiert und in Q_1 auf CQ_0 die Senkrechte errichtet, die CP_0 in P_1 schneiden möge. Dann ist $2 \operatorname{Def} P_1CQ_1 = \operatorname{Def} P_1CQ_0 < \operatorname{Def} P_0CQ_0$ und daher $\operatorname{Def} P_1CQ_1 < \frac{1}{2} \operatorname{Def} P_0CQ_0$. Durch Wiederholung dieser Konstruktion ergibt sich $\operatorname{Def} P_nCQ_n < \frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0$ und es besteht umsomehr $\operatorname{Def} PCQ < \frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0$, falls $CP < CP_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet sich aber ein n derart, daß $\frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0 < \varepsilon$ ausfällt, also folgt daraus die Limesbeziehung (8), w. z. b. w.

Satz V. *Streben die Seiten des Dreiecks ABC gegen 0 und streben gleichzeitig der Winkel C gegen $\frac{\pi}{2}$ und der Winkel A gegen x, so strebt $BC:AB$ gegen 0, 1, oder $S(x)$, je nachdem $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, oder $0 < x < \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz zuerst für den Spezialfall $\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$.

Im Falle $x = 0$ schließt man so. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es offenbar ein rechtwinkliges Dreieck AB^*C^* mit $\sphericalangle C^* = \frac{\pi}{2}$, in dem

(9) $$B^*C^* : AC^* < \varepsilon$$

ausfällt. Ist schon $\sphericalangle BAC < B^*AC^*$ und $AB < AC^*$, so denken wir die Dreiecke in der Weise aneinander gelegt, daß die Halbgeraden AC und AC^* zusammenfallen und beide Dreiecke an derselben Seite von AC liegen mögen. Die Gerade AB möge (auf Grund unserer Annahme) B^*C^* in B' schneiden. So ist $AC^* < AB'$ und a fortiori $AB < AB'$, also nach Satz III $BC:AB < (BC:AB)(AB:AC) < (B'C^*:AB')(AB':AC^*) = B'C^* : AC^*$. Da aber nach unserer Annahme offenbar $B'C^* < B^*C^*$ ausfällt, besteht mit Rücksicht auf (9) umsomehr $BC:AB < \varepsilon$, also ist der Satz für diesen Fall bewiesen.

Ist $x = \frac{\pi}{2}$, d. h. $\sphericalangle A \to \frac{\pi}{2}$, so gilt nach Satz IV $\sphericalangle B \to 0$, also im Sinne der Vorangehenden $AC:AB \to 0$. Es ist aber $0 < AB - BC < AC$ und daher $0 < 1 - (BC:AB) < AC:AB$, also a fortiori $BC:AB \to 1$, wie behauptet wurde.

Es sei nun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ein rechtwinkliges Dreieck $A'BC'$ mit $A'B = AB$ und $\sphericalangle BA'C' = x$ sei an Dreieck ABC gelegt derart, daß die Halbgeraden BC und BC' zusammenfallen und beide Dreiecke an derselben Seite von BC liegen mögen. Wird von A' auf die Gerade AC das Lot $A'D$ gefällt, so gibt es im Viereck $A'C'CD$ drei rechte Winkel, nämlich bei C', C, D, daher ist $\sphericalangle DA'C' < \frac{\pi}{2}$ (auf Grund des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck), also bekanntlich $CC' < DA'$ und umsomehr $CC' < AA'$. (Hier konnte vorausgesetzt werden, daß $\sphericalangle A \neq x$ ist, also A' mit A nicht zusammenfällt.) Folglich ist $|BC : AB - BC' : A'B| = CC' : AB < AA' : AB$. Bedeutet M die Mitte von AA', so kann diese Ungleichung in der Gestalt

(10) $$|BC : AB - BC' : A'B| < 2MA : AB$$

geschrieben werden. Wegen $AB = A'B$ ist aber $\sphericalangle ABM$ gleich der Hälfte von $\sphericalangle ABA' = |\sphericalangle ABC - \sphericalangle A'BC|$, und $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$. Da nach Satz IV und infolge der Voraussetzung $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'BC$ gegen $\frac{\pi}{2} - x$ streben, so hat man $\sphericalangle ABM \to 0$, also nach dem oben bewiesenen

(11) $$MA : AB \to 0.$$

Nach der Definition von $S(x)$ (vgl. (6)) gilt andererseits $BC' : A'B \to S(x)$; aus (10) und (11) folgt daher $BC : AB \to S(x)$. Der Satz ist damit auch für diesen dritten Spezialfall bewiesen.

Der allgemeine Satz ist nunmehr leicht zu beweisen. Wird von B auf AC das Lot BD gefällt, so gilt für das Dreieck BCD nach der Voraussetzung $\sphericalangle BCD \to \frac{\pi}{2}$, also im Sinne der obigen strebt $BC : BD$ gegen 1. Für das Dreieck ABD strebt $BD : AB$ nach den Vorangehenden gegen 0, 1, oder $S(x)$, je nachdem $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, oder $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Durch Multiplikation folgt die Behauptung für $BC : AB$.

Korollar. *Es ist* $C(\frac{\pi}{2} - x) = S(x)$.

Satz VI. *Wird* $S(\frac{\pi}{2}) = 1$ *und* $S(x) = S(\pi - x)$ *für* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ *gesetzt, so bestehen für jedes Dreieck* ABC *mit den Bestimmungsstücken* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\sphericalangle C = \nu$ *die Relationen* $S(\lambda) : K(a) = S(\mu) : K(b) = S(\nu) : K(c)$. (Absoluter Sinussatz von J. Bolyai[7]) in umgehüllter Form.)

Beweis. Wir lassen wie Ch. J. de la Vallée Poussin, a. a. O., bei festem AB den Winkel μ ein wenig wachsen und die Seite BC um B drehen, so daß ein Dreieck ABC' mit $BC' = a$, $\sphericalangle ABC' = \mu' > \mu$ entsteht. Auf die Seite $AC' = b'$ werde die Strecke $AC'' = b$ abgetragen. Da infolge $\mu' > \mu$ bekanntlich $b' > b$ ist, so fällt dabei C'' zwischen A und C' und es gilt $C'C'' = b' - b$. Wenn nun $\mu' \to \mu$, so gilt augenscheinlich $\sphericalangle C'C''C \to \frac{\pi}{2}$, und $\sphericalangle C'CC'' \to \nu$ oder $\pi - \nu$ je nachdem $\nu \leqq \frac{\pi}{2}$ oder $\nu > \frac{\pi}{2}$ ist, und die Seiten von Dreieck $C'CC''$ streben gegen 0. Aus dem Satz V und den Festsetzungen des Satzes VI folgt, daß $C'C'' : CC' = (b' - b) : CC' \to S(\nu)$. Laut

[7]) Vgl. J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 25. (Unveränderter Neudruck, 1907.)

der Erklärung der Funktion $K(r)$ in (5) hat man aber $CC' : (\mu' - \mu) \to K(a)$, und aus diesen zwei letzten Limesrelationen folgt

(12) $$(b' - b) : (\mu' - \mu) \to K(a)\,S(\nu).$$

Wenn man bei festem BC mit der Seite AB ähnlich verfährt und das Dreieck CBA' mit $BA' = c$, $\sphericalangle CBA' = \mu'$ entsteht, so wird offenbar $CA' = AC' = b'$. Auf diese Weise ergibt sich daher für $\mu' \to \mu$ die Limesbeziehung

(13) $$(b' - b) : (\mu' - \mu) \to K(c)\,S(\lambda).$$

(12) und (13) ergeben $K(a)\,S(\nu) = K(c)\,S(\lambda)$ d. h. $S(\lambda) : K(a) = S(\nu) : K(c)$. Aus denselben Gründen besteht noch $S(\nu) : K(c) = S(\mu) : K(b)$, w. z. b. w.

Korollar. *Es ist* $S(\lambda) \neq 0$. Im Falle $\nu = \frac{\pi}{2}$ ist nämlich laut dem Satze $S(\lambda) = K(a) : K(c)$.

Für $S(x)$ gilt also nach (7) im ganzen Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Abschätzung

(14) $$0 < S(x) < 1.$$

§ 4. Berechnung der Funktionen $S(x)$ und $C(x)$.

Zur Berechnung der Funktionen $S(x)$ und $C(x)$ haben wir drei Sätze nötig. Mit Hilfe des Satzes VI beweisen wir zunächst den folgenden

Satz VII. *Für $r \to 0$ bzw. $x \to 0$ streben die Funktionen $K(r) : r$ und $S(x) : x$ gegen einem gemeinsamen endlichen Grenzwert ω.*

Beweis. Wir nehmen ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $\sphericalangle BAB' = 2x$, $AB = AB' = r$. Die Seite BB' ist eine Funktion von x; man setze $BB' = 2s(x)$. M sei die Mitte von BB' d. h. $MB = MB' = s(x)$. Mit Rücksicht auf die Erklärung (5) der Funktion $K(r)$ gilt

(15) $$s(x)/x = 2s(x)/2x \to K(r) \text{ für } x \to 0.$$

Bei festgehaltenem x besteht für $r_1 < r$ wegen $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$ und des Satzes III $s_1(x)/r_1 < s(x)/r$ oder mit x dividiert

(16) $$\frac{1}{r_1}\frac{s_1(x)}{x} < \frac{1}{r}\frac{s(x)}{x}.$$

Werden r und r_1 festgehalten, so gilt für $x \to 0$ infolge (15) $s_1(x)/x \to K(r_1)$, $s(x)/x \to K(r)$, aus (16) folgt also $K(r_1)/r_1 \leqq K(r)/r$. Damit ist gezeigt, daß bei Verkleinerung von r das Verhältnis $K(r) : r$ nicht vergrößert wird. Es strebt daher für $r \to 0$ einem bestimmten endlichen Grenzwert ω zu.

Im Dreieck AMB ist wegen $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$ nach dem Satze VI

$$S(x) = K(s(x)) : K(r) = [K(s(x)) : s(x)]\,[s(x) : K(r)],$$

also

(17) $$S(x) : x = [K(s(x)) : s(x)]\,[s(x) : x]\,[1 : K(r)].$$

Für $x \to 0$ gilt aber bei festem r offenbar $s(x) \to 0$, also nach dem obigen

$K(s(x)):s(x) \to \omega$. Aus (17) folgt daher mit Rücksicht auf (15) $\lim_{x\to 0} S(x):x=\omega$, w. z. b. w.

Korollar. *Es ist* $\lim_{r\to 0} K(r)=0$, $\lim_{x\to 0} S(x)=0$.

Satz VIII. *Die Funktionen* $S(x)$ *und* $C(x)$ *genügen der Funktionalgleichung* $S(2x)=2S(x)\,C(x)$.

Beweis. Wir betrachten nochmals ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $AB=AB'$, $\sphericalangle BAB'=2x$. Wird von A auf BB' das Lot AM gefällt, so ist $\sphericalangle BAM=\sphericalangle B'AM=x$, $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMB'=\frac{\pi}{2}$. Hieraus folgt für $AB\to 0$ nach Satz IV $\sphericalangle AB'M\to\frac{\pi}{2}-x$. Wird noch von B auf AB' das Lot BN gefällt, so gilt daher nach Satz V und seinem Korollar $BN:BB'\to$ $\to S(\frac{\pi}{2}-x)=C(x)$. Wegen $BB'=2BM$ können wir dieser Limesbeziehung auch die Form $(BN:AB)\,(AB:BM)\to 2C(x)$ geben. Da ferner nach der Definition (6) $BM:AB\to S(x)$, so ergibt sich $BN:AB\to 2S(x)\,C(x)$. Andererseits gilt wieder nach der Definition $BN:AB\to S(2x)$, folglich besteht der Satz.

Satz IX. *Es ist* $S(x)^2+C(x)^2=1$.

Beweis. Wir nehmen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle C=\frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle A=x$. Wird von C auf AB das Lot CD gefällt, so ist

(18) $1=(AD:AB)+(DB:AB)=(AD:AC)\,(AC:AB)+(DB:BC)\,(BC:AB)$.

Hier gelten für $AB\to 0$ nach der Erklärung der Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ die Relationen $AD:AC\to C(x)$, $AC:AB\to C(x)$, $BC:AB\to S(x)$. Da nach Satz IV $\sphericalangle ACD\to\frac{\pi}{2}-x$, d. h. $\sphericalangle BCD\to x$, so hat man wegen Satz V $DB:BC\to S(x)$. Aus (18) folgt daher die Behauptung.

Nun sind wir imstande, die Funktionen $S(x)$ und $C(x)$ zu berechnen.

Auf Grund der Abschätzung (14) können wir setzen $S(x)=\sin y(x)$ wobei $0<y(x)<\frac{\pi}{2}$ ist. Aus Satz IX folgt dann wegen $C(x)>0$ (vgl. (7)) $C(x)=\cos y(x)$, also nach Satz VIII ist $\sin y(2x)=\sin 2y(x)$. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergibt sich für $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\sin y(x)=|\sin[2^n y(x/2^n)]|$. Auf Grund des Satzes VII und dessen Korollars folgt daraus im Falle $n\to\infty$ $S(x)=\sin y(x)=|\sin\omega x|$, also nach dem Korollar von Satz V $C(x)=|\sin\omega(\frac{\pi}{2}-x)|$. Hier ist aber nur $\omega=1$ möglich. Im Falle $\omega>1$ wäre nämlich $0<\pi/2\omega<\pi/2$, $S(\pi/2\omega)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ im Gegensatze zu $S(x)<1$ (vgl. (7)), im Falle $0<\omega<1$ wäre $0<\omega\pi/2<\pi/2$ also $\lim_{x\to 0}[S(x)^2+C(x)^2]=\sin^2(\omega\pi/2)<1$, was dem Satze IX widerspricht, und der Fall $\omega=0$ ist unmöglich wegen $S(x)\neq 0$. Wir erhalten somit $S(x)=\sin x$, $C(x)=\cos x$.

Die Sätze VI und VII gehen daher in die folgenden über:

Satz VI*. *Für ein Dreieck ABC mit den Bestimmungsstücken* $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=\lambda$, $\sphericalangle B=\mu$, $\sphericalangle C=\nu$ *besteht* $\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = K(a) : K(b) : K(c)$.

Satz VII*. *Für die Funktion* $K(r)$ *gilt die Grenzformel* $\lim_{r\to 0} K(r)/r = 1$.

§ 5. Die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck ($\sphericalangle C=\pi/2$) mit den Bestimmungsstücken $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=\lambda$, $\sphericalangle B=\mu$. Mit Hilfe eines Kunstgriffes von M. Réthy (a. a. O) ergibt sich auf Grund des Satzes VI* $K(2a)=2K(a)\cos\lambda/\sin\mu$. Daher ist $\cos\lambda/\sin\mu=\varphi(a)$ eine Funktion von a; wegen $\lambda+\mu<\pi/2$ ist gewiß $\varphi(a)>1$. M. Réthy (a. a. O.) zeigt noch, daß $K^2(a)/(\varphi^2(a)-1)=k^2$ $(k>0)$ eine Konstante ist. Die Funktionen $f(x)=K(x)/k$ und $\varphi(x)$ genügen also den Funktionalgleichungen $f(2x)=2f(x)\varphi(x)$, $\varphi^2(x)=f^2(x)+1$. Hier ist auf Grund des Satzes VII* $\lim_{x\to 0} f(x)/x=1/k$ und aus diesen Gleichungen ergeben sich demnach $K(x)=k\,\mathrm{sh}(x/k)$, $\varphi(x)=\mathrm{ch}(x/k)$. Mit Rücksicht auf den Satz VI* besteht daher folgender

Satz X. *Für das rechtwinklige Dreieck ABC* ($\sphericalangle C=\pi/2$) *mit den obigen Bestimmungsstücken gelten die Formeln*

$$\sin\lambda=\mathrm{sh}(a/k):\mathrm{sh}(c/k),\quad \cos\lambda:\sin\mu=\mathrm{ch}(a/k),$$

wobei k eine konstante Strecke bedeutet.

Dieser Satz hat schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge.

(Eingegangen am 1. September 1949.)